CRECIMIENTO ÓPTIMO

MODELO DEL PLANIFICADOR
CASS-KOOPMANS

Modelo en magnitudes per cápita. No hay progreso técnico, pero su introducción no engendraría problemas:

$$Max \int_0^\infty e^{-\theta t} U(c_t) dt$$
$$s.a. \quad \dot{k}_t = y_t - (\delta + n) k_t - c_t$$

Suponemos:

$$y_t = A k_t^{\alpha}$$
$$U(c_t) = \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} \quad ; \quad U' = c_t^{-\sigma} \quad ; \quad -\frac{U'}{U''} = \frac{c_t}{\sigma}$$

Solución

Ver repaso de Principio del Máximo en Apéndice

Hamiltoniano

$$H = \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} + \lambda_t \left[A k_t^{\alpha} - (\delta + n) k_t - c_t \right]$$

$c_t = \text{var}.\,control$

$k_t = \text{var}.\,estado$

$\lambda_t = \text{var}.\,coestado$

Condiciones de óptimo:

$$P.1 \quad c_t^{-\sigma} = \lambda_t$$

$$P.2 \quad \alpha A k_t^{\alpha-1} - (\delta+n) - \theta + \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} = 0$$

$$P.3 \quad \lim_{t\to\infty} \lambda_t e^{-\theta t} k_t = 0$$

Derivando P.1 respecto al tiempo y dividiendo por si misma:

$$\sigma \frac{\dot{c}_t}{c_t} = -\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t}$$

que teniendo en cuenta P.2 se obtiene:

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\sigma}\left[\alpha A k_t^{\alpha-1} - (\theta+n+\delta)\right]$$

que junto a

$$\dot{k}_t = A k_t^{\alpha} - (n+\delta) k_t - c_t$$

determinan las condiciones dinámicas del modelo (algunas de las dinámicas propiciadas por estas ecuaciones son “perversas”, pero la condición de transversalidad las elimina).

Al tener este modelo la misma tecnología que Solow el EE se define por

$$\dot{k} = \dot{c} = 0 \quad \rightarrow \quad A k_s^{\alpha} = (\delta+n) k_s + c_s \quad (\dot{k}=0)$$

$$\rightarrow \quad \alpha A k_s^{\alpha-1} = \theta + n + \delta \quad (\dot{c}=0)$$

$k_s^* = \left[\dfrac{\alpha A}{\theta+n+\delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$. Se demuestra fácilmente que $k_s^* < k_{RO}$, si $\theta > 0$.

El consumo óptimo en EE es:

$$c_s^* = \frac{\theta+(n+\delta)(1-\alpha)}{\alpha}\left[\frac{\alpha A}{\theta+\delta+n}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

DIAGRAMA DE FASES DE LA SOLUCIÓN

CRECIMIENTO A LARGO PLAZO 441

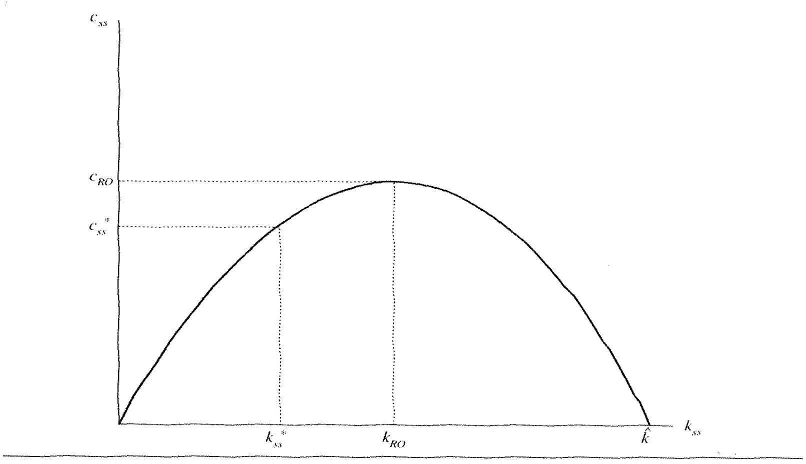


FIGURA 8.9

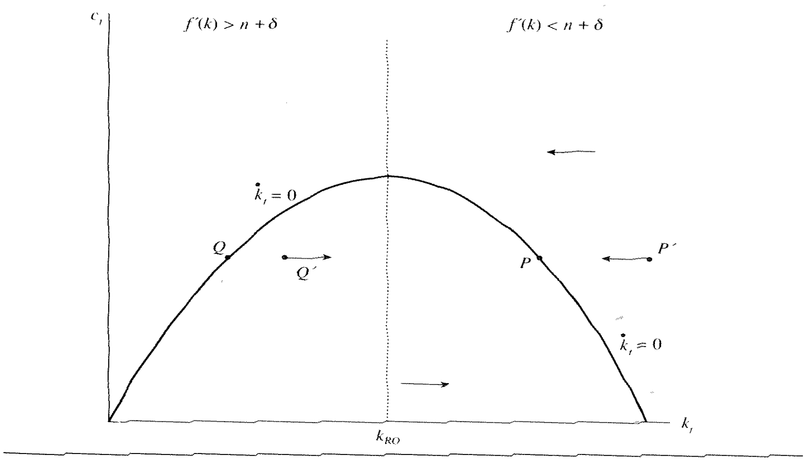
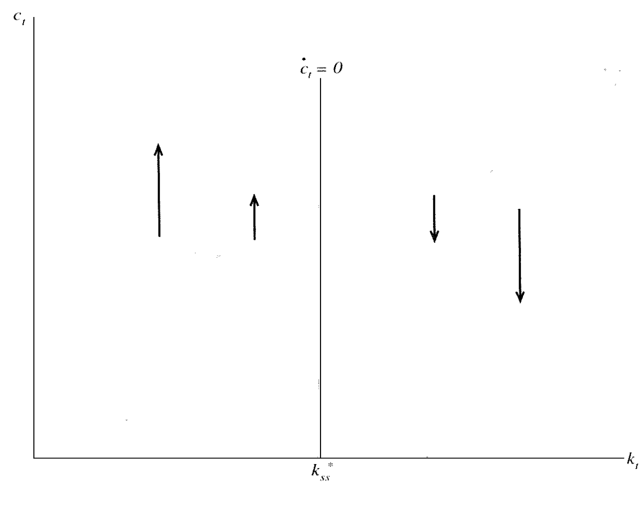
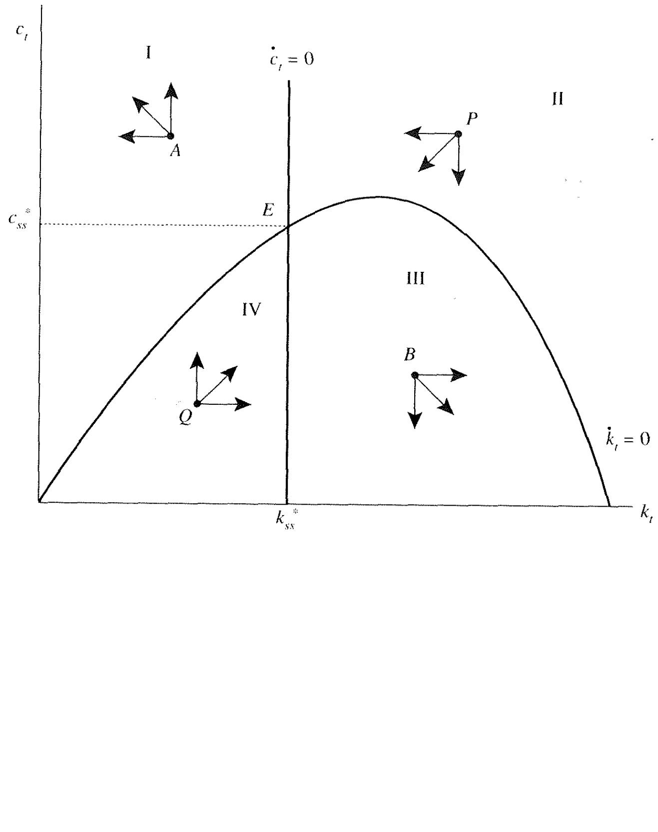


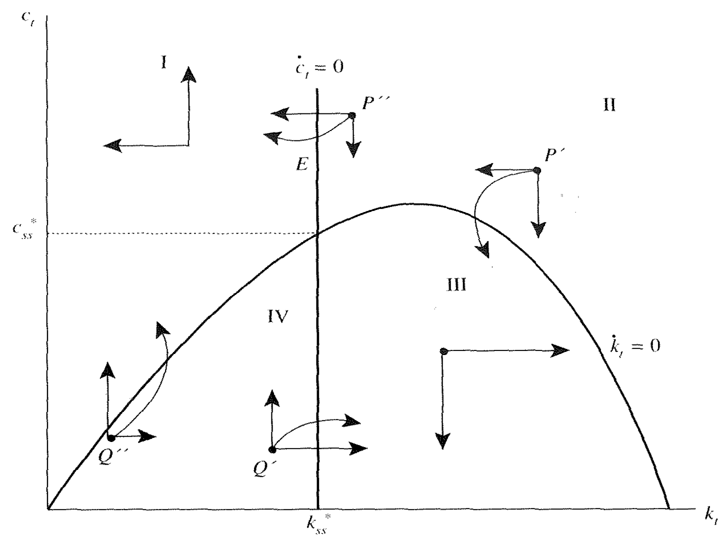
FIGURA 8.10



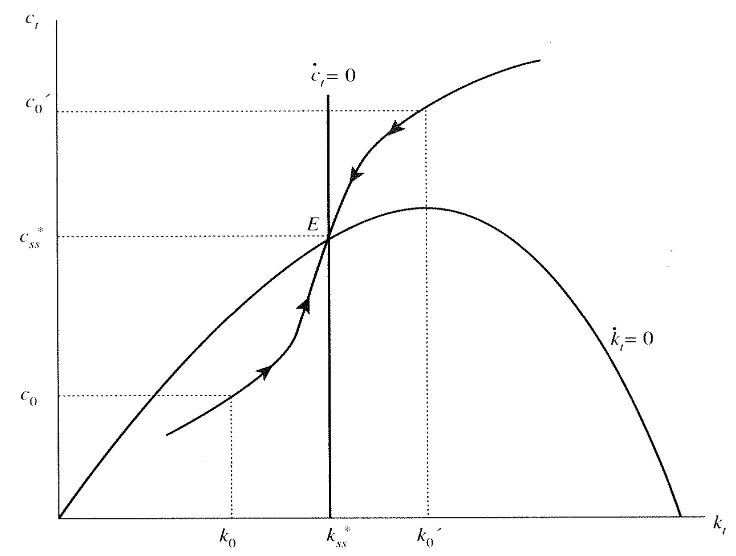
c_t
$\dot{c}_t = 0$
k_{ss}^*
k_t



c_t
I
$\dot{c}_t = 0$
II
A
P
c_{ss}^*
E
III
IV
B
Q
$\dot{k}_t = 0$
k_{ss}^*
k_t



c_t
I
$\dot{c}_t = 0$
P''
II
E
P'
c_{ss}^*
III
IV
$\dot{k}_t = 0$
Q''
Q'
k_{ss}^*
k_t



c_t
$\dot{c}_t = 0$
c_0'
E
c_{ss}^*
$\dot{k}_t = 0$
c_0
k_0
k_{ss}^*
k_0'
k_t

INTERPRETACIÓN DE CASS-KOOPMANS COMO EQUILIBRIO COMPETITIVO

Consumidores

- Ofrecen (inelásticamente) trabajo a las empresas por un salario real ω
- Compran acciones de empresas que proporcionan rentabilidad r

$$Max \int_0^\infty e^{-\theta t} \frac{c_t^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} dt$$

$$s.a. \quad \dot{v}_t + c_t = \omega_t + (r_t - n) v_t$$

donde v_t = demanda de acciones por consumidor.

Hamiltoniano del problema del consumidor:

$$H = \left[\frac{c_t^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} + q_t \left(\omega_t + (r_t - n) v_t - c_t \right) \right]$$

$c_t = \text{var}.\mathit{control}$

$v_t = \text{var}.\mathit{estado}$

$q_t = \text{var}.\mathit{coestado}$

Condiciones de óptimo:

$$C.1 \quad c_t^{-\sigma} - q_t = 0$$

$$C.2 \quad \dot{q}_t = \theta q_t - (r_t - n) q_t$$

$$C.3 \quad \lim_{t \to \infty} e^{\theta t} q_t v_t = 0$$

Empresas

$$Max\,V_0=\int_0^{\infty} e^{-\int_0^t r_s}\left[AK^{\alpha}N^{1-\alpha}-\omega_t N_t-\delta K_t-\dot{K}_t\right]dt=\int_0^{\infty} G\left(K_t,N_t,\dot{K}_t,\omega_t,r_t\right)$$

Condición de Euler:

$$\frac{\partial G}{\partial K_t}=\frac{d\left(\frac{\partial G}{\partial \dot{K}_t}\right)}{dt}$$

$$\frac{\partial G}{\partial K_t}=\left(a AK^{\alpha-1}N^{1-\alpha}-\delta\right)e^{-\int_0^t r_s dt} \qquad \frac{\partial G}{\partial \dot{K}_t}=-e^{-\int_0^t r_s dt}$$

Pero:

$$\frac{d\left(-e^{-\int_0^t r_s ds}\right)}{dt}=e^{-\int_0^t r_s ds}\left(\frac{d\int_0^t r_s ds}{dt}\right)=e^{-\int_0^t r_s ds}\,r_t$$

Luego:

$$\left(\alpha AK^{\alpha-1}N^{1-\alpha}-\delta\right)e^{-\int_0^t r_s ds}=r_t\,e^{-\int_0^t r_s ds} \quad \rightarrow \quad \alpha AK^{\alpha-1}N^{1-\alpha}=\delta+r_t$$

La condición de Euler respecto a *N*:

$$\frac{\partial G}{\partial N_t}=0 \quad \rightarrow \quad (1-\alpha)AK^{\alpha}N^{-\alpha}-\omega_t=0$$

Por tanto, las condiciones de óptimo de las empresas:

$$E.1 \quad \left(1-\alpha\right)AK_t^{\alpha}N_t^{-\alpha}=\omega_t \quad \rightarrow \quad \left(1-\alpha\right)Ak_t^{\alpha}=\omega_t$$

$$E.2 \quad \alpha AK_t^{\alpha-1}N_t^{1-\alpha}=r_t+\delta \quad \rightarrow \quad \alpha Ak_t^{\alpha-1}=r+\delta$$

Las mismas que las de un problema de optimización puntual.

Equilibrio Competitivo Dinámico:

Sucesión $\left[c_t^*, K_t^*, N_t^*, \omega_t^*, r_t^*, v_t^*\right]$ *que cumplen con las condiciones de óptimo de consumidores y empresas y vacían los mercados.*

Teorema: Las sucesiones que constituyen un Equilibrio Competitivo Dinámico resuelven el problema del Planificador

Si definimos $\lambda_t = q_t$:

$$C.1 \quad \Leftrightarrow \quad P.1$$
$$C.2 + E.1 \quad \Leftrightarrow \quad P.2$$
$$C.3 + k_t = v_t \quad \Leftrightarrow \quad P.3$$

De las condiciones se obtiene:

$$\alpha A k_t^{\alpha-1} = r_t + \delta$$
$$\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} = \theta + n - r_t$$

En EE $\dot{\lambda} = 0$, luego:

$$\alpha A k_s^{\alpha-1} = \theta + n + \delta \quad \rightarrow \quad k_s^* = \left[\frac{\alpha A}{\theta + n + \delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

la misma que en la solución del Planificador.

Por otra parte, en EE:

$$\dot{q}_t = 0 \quad \rightarrow \quad r = \theta - n$$

MODELO CASS-KOOPMANS CON GOBIERNO

Gobierno

Restricción presupuestaria:

$$G_t + r_t B_t = T_t + \dot{B}_t$$

En términos per cápita (si, por simplicidad, hacemos n=0):

$$g_t + r_t b_t = i_t + \dot{b}_t$$

Si suponemos que el Gobierno impone un impuesto sobre el consumo al tipo η:

$$i_t = \eta c_t$$

Si suponemos que impone un impuesto proporcional sobre la renta al tipo τ

$$i_t = \tau\left(\omega_t + r_t\left(v_t + b_t\right)\right)$$

Por otra parte:

$$c_t + \dot{k}_t + \delta k_t + g_t = A k_t^{\alpha}$$

Consumidores

$$Max \int_0^{\infty} e^{-\theta t} \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} dt$$

sometido a (impuesto sobre el consumo):

$$\dot{a}_t + \left(1+\eta\right) c_t = \omega_t + r_t a_t$$
$$a_t = b_t + v_t$$

o sometido a (impuesto sobre la renta):

$$\dot{a}_t + c_t = (\omega_t + r_t a_t)(1-\tau)$$
$$a_t = b_t + v_t$$

r es la misma rentabilidad de ambos activos financieros (información completa y ausencia de aversión al riesgo).
En ambos casos mantenemos *n=0*.

Variables de control: c_t, b_t, v_t
Variable estado: a_t

Hamiltoniano con impuesto sobre el consumo:

$$H = \frac{c_t^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} + q_t(a_t - b_t - v_t) + \lambda_t(\omega_t + r_t a_t - (1+\eta)c_t)$$

Hamiltoniano con impuesto sobre la renta:

$$H = \frac{c_t^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} + q_t(a_t - b_t - v_t) + \lambda_t((1-\tau)(\omega_t + r_t a_t) - c_t)$$

Condiciones de óptimo con impuesto sobre el consumo:

$$c_t^{-\sigma} = (1+\eta)\lambda_t$$
$$-q_t = 0$$
$$-q_t = 0$$
$$\dot{\lambda}_t = \theta\lambda_t - q_t - \lambda_t r_t$$

que junto a la condición de transversalidad se convierten en:

$$C'.1 \quad c_t^{-\sigma} = (1+\eta)\lambda_t$$
$$C'.2 \quad \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} = \theta - r_t$$
$$C'.3 \quad \lim_{t\to\infty} e^{-\theta t}\lambda_t a_t = 0$$

Condiciones de óptimo con impuesto proporcional sobre la renta:

$$C''.1 \quad c_t^{-\sigma} = \lambda_t$$

$$C''.2 \quad \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} = \theta - r_t(1-\tau)$$

$$C''.3 \quad \lim_{t\to\infty} e^{-\theta t}\lambda_t a_t = 0$$

En ambos casos el problema de la ***empresa*** es el mismo que cuando no había Gobierno:

$$E.1 \quad (1-\alpha)Ak_t^{\alpha} = \omega_t$$

$$E.2 \quad \alpha Ak_t^{\alpha-1} = r + \delta$$

Puede comprobarse fácilmente que el EE óptimo es, en cada uno de los casos:

$$\alpha Ak_s^{\alpha-1} = \theta + \delta \quad \rightarrow \quad k_s^* = \left[\frac{\alpha A}{\theta+\delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \qquad (impto.\ consumo)$$

$$\alpha Ak_s^{\alpha-1} = \frac{\theta}{1-\tau} + \delta \quad \rightarrow \quad k_s^* = \left[\frac{\alpha A}{\frac{\theta}{1-\tau}+\delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \qquad (impto.\ renta)$$

El primero es el mismo que en el caso sin Gobierno (téngase en cuenta que aquí hemos supuesto $n=0$). El segundo supone un k menor y, por tanto, una menor renta per cápita.

El consumo per cápita en EE viene dado por:

$$c_s^* = Ak_s^{\alpha *} - g_s - \delta k_s^*$$

Luego en el caso del impuesto sobre el consumo será menor, exactamente por el valor de g_s, que el consumo en el modelo sin Gobierno. En el caso del impuesto sobre la renta será menor por una cuantía mayor, pues tanto k como y será menor.

CRECIMIENTO OPTIMO CON "IMPUESTO" SOBRE INVERSIÓN

$$Y_t = AK_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}$$
$$\dot{K}_t = I_t - \delta K_t$$
$$C_t = Y_t - (1+\tau) I_t$$

Varias posibles interpretaciones de τ ligadas a distorsiones institucionales.

En términos per cápita:

$$y_t = Ak_t^{\alpha}$$
$$y_t = c_t + (1+\tau)\left(\dot{k}_t + (n+\delta)k_t\right)$$

Misma función objetivo del "Planificador" que en Cass-Koopmans.

Hamiltoniano:

$$H = \frac{c_t^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} + \lambda_t \left[\frac{A}{1+\tau}k_t^{\alpha} - \frac{c_t}{1+\tau} - (n+\delta)k_t\right]$$

Condiciones de óptimo:

$$c_t^{-\sigma} = \frac{\lambda_t}{1+\tau}$$
$$\dot{\lambda}_t = \theta\lambda_t - \lambda_t\left[\frac{aA}{1+\tau}k_t^{\alpha-1} - (n+\delta)\right]$$
$$\lim_{t\to\infty} e^{-\theta t}\lambda_t k_t = 0$$

Derivando respecto al tiempo la primera, teniendo en cuenta la segunda:

$$\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} = -\sigma\frac{\dot{c}_t}{c_t}$$

que permite obtener:

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t}=\frac{1}{\sigma}\left[\frac{\alpha A}{1+\tau}k_t^{\alpha-1}-\left(n+\delta+\theta\right)\right]$$

que junto a la ecuación:

$$\dot{k}_t=\frac{A}{1+\tau}k_t^{\alpha}-\frac{c_t}{1+\tau}-\left(n+\delta\right)k_t$$

definen la dinámica de la solución (restringida por la condición de transversalidad).

En EE:

$$\dot{c}_t=0 \quad \rightarrow \quad \alpha A=\left(n+\delta+\theta\right)\left(1+\tau\right)k_s^{1-\alpha}$$

$$k_s^{*}=\left[\frac{\alpha A}{\left(n+\delta+\theta\right)\left(1+\tau\right)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad ; \quad y_s^{*}=\left[\frac{\alpha A}{\left(n+\delta+\theta\right)\left(1+\tau\right)}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

La renta per cápita será menor que cuando no existe τ y será menor cuanto mayor sea τ.

Esta ilustración teórica de las consecuencias para el crecimiento de las distorsiones institucionales recoge solamente un aspecto del desvío de rentas.

APÉNDICE

Principio del Máximo de Pontryagin

$$Max \int_0^\infty e^{-\rho t} g\left(x_t, v_t\right) dt \quad s.a. \quad \dot{x}_t = h\left(x_t, v_t\right)$$

x_t = variable estado; v_t = variable control

Hamiltoniano:

$$H = g\left(x_t, v_t\right) + \lambda_t h\left(x_t, v_t\right)$$

Condiciones de óptimo:

$$\frac{\partial H}{\partial v_t} = \frac{\partial g}{\partial v_t} + \frac{\partial h}{\partial v_t} = 0$$

$$\dot{\lambda}_t = \rho \lambda_t - \frac{\partial H}{\partial x_t} = \rho \lambda_t - \frac{\partial g}{\partial x_t} - \lambda_t \frac{\partial h}{\partial x_t}$$

$$\lim_{T \to \infty} e^{-\rho T} \lambda_T x_T = 0$$

Cálculo de Variaciones

$$v_t = \dot{x}_t$$

$$Max \int_0^\infty g\left(x_t, \dot{x}_t\right) dt$$

Condición de Euler:

$$\frac{\partial g}{\partial x_t} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}_t}\right]$$